Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 251–252

О чебышевских подпространствах в $C(T)$

Г. М. Устинов

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Аннотация. Основной результат работы связан с проблемой о чебышевских подпространствах бесконечной размерности и коразмерности в рефлексивных пространствах $C(Q)$. Доказано, что в любом пространстве $C(Q)$ над счетным метрическим компактом Q с конечным числом предельных точек таких подпространств не существует.

Пока не решен давно известный вопрос: содержит ли какое-либо сепарабельное пространство $C(Q)$ чебышевское подпространство $L,\ \dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$? Определенный шаг в решении этого вопроса представляет

Теорема 1. *Пусть T — счетный метризуемый компакт, множество предельных точек которого конечно, $L \subset C(T)$ — замкнутое подпространство,*

$$\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty.$$

Тогда L — не чебышевское подпространство.

Введем необходимые определения. Если $t \in T$, то полагаем

$$\delta_t(e) = \begin{cases} 1, & t \in e, \\ 0, & t \overline{\in} e \end{cases}, \qquad \delta_t = \delta(t).$$

Тогда $\forall \mu \in C^*(T)$ представима в виде $\mu = \sum\limits_{t\in T} \mu_t \delta_t,\ \mu_t \in R,\ \|\mu\| = \sum\limits_{t\in T} |\mu_t| < +\infty$; $\mu_t = \mu(t)$, полагаем $\operatorname{supp}\mu = \{t \in T:\ \mu_t \neq 0\}$.

Для $h \in C(T),\ \|h\| = \max\limits_{t\in T}|h(t)|,\ \operatorname{supp} h = \{t \in T:\ \ h(t) \neq 0\}$. Если $|\operatorname{supp}\mu| < +\infty$ ($|\operatorname{supp} h| < +\infty$), то элемент $\mu \in C^*(T)$ ($h \in C(T)$) называем финитным. Для $L \subset C(T)$ обозначаем $L^\perp = \{\mu \in C^*(T):\ \mu(h) = 0\ \forall\, h \in L\}$ — аннулятор L, $S_{L^\perp} = \{\mu \in L^\perp:\ \|\mu\| = 1\}$. Известно, что если $h \in C(T)\backslash L$, то $\exists\ \mu_h \in S_{L^\perp}:\ \ \mu_h(h) = \rho(h, L) = d$. Хорошо известна следующая лемма.

Лемма А. *Пусть $L \subset C(T),\ \dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$ и если либо L, либо $L^\perp$ содержат финитный элемент, то L не чебышевское подпространство.*

Эта лемма позволяет установить следующую теорему.

Теорема 2. *Если L — чебышевское подпространство в $C(T)$, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$, $\mu_k,\ \mu_0 \in S_{L^\perp}$, причем $\mu_k \underset{k\to\infty}{\overset{W^*}{\longrightarrow}} \mu_0$, то $\|\mu_k - \mu_0\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

В дальнейшем считаем, что L не удовлетворяет условиям леммы. Каждый элемент $h \in C(T)\backslash L$ определяет на $L^\perp$ w^*-непрерывный функционал $\widetilde{h}$ соотношением $\widetilde{h}(\mu) = \mu(h)$, причем $\|\widetilde{h}\| = \rho(h, L) = d$. Согласно классическому результату А. Л. Гаркави [1] h имеет в L единственный ближайший элемент l_h тогда и только тогда, когда $\widetilde{h}$ допускает единственное w^*-непрерывное продолжение H с $L^\perp$ на все $C^*(T)$, с сохранением нормы $\|H\| = \|\widetilde{h}\|$. Если $\pi:\ C(T) \to L$ — оператор метрического проектирования, то $h = \pi(h) + H$.

Так как $\delta_t \overline{\in} L^\perp$, то $L_t = L \oplus [\delta_t]$ — одномерное расширение $L^\perp$. Согласно аналитической форме теоремы Хана – Банаха продолжение H на L_t определяется формулой $H(\mu + \alpha\delta_t) =$

$= h(\mu) + \alpha\beta_t$, где $\beta_t \in R$ и требование $\|H\| = \|\widetilde{h}\|$ выполняется, если $\beta_t \in [\beta_t^-, \beta_t^+]$ (см. [2]). Далее используются видоизмененные формулы для $[\beta_t^-, \beta_t^+]$ (см. [3]). Введем множества $D_h^-(t),\ D_h^+(t)$, полагая

$$D_h^-(t) = \{\mu \in S_{L^\perp}:\ \mu_t > 0,\ d - h(\mu) \leqslant 2d\mu_t\},$$
$$D_h^+(t) = \{\mu \in S_{L^\perp}:\ \mu_t < 0,\ d - h(\mu) \leqslant 2d|\mu_t|\}$$

и пусть

$$\gamma_h^-(t) = \inf_{\mu \in D_h^-(t)} \frac{d - h(\mu)}{\mu_t}, \qquad \gamma_h^+(t) = \inf_{\mu \in D_h^+(t)} \frac{d - h(\mu)}{|\mu_t|},$$

тогда

$$\beta^-{}_t = \begin{cases} -d, & \text{если } D_h^-(t) = \varnothing, \\ d - \gamma_h^-(t), & \text{если } D_h^-(t) \neq \varnothing, \end{cases} \qquad \beta^+{}_t = \begin{cases} d, & \text{если } D_h^+(t) = \varnothing, \\ -d + \gamma_h^+(t), & \text{если } D_h^+(t) \neq \varnothing. \end{cases}$$

Теорема 3. *Если L — чебышевское подпространство в $C(T)$, $h \in C(T)\backslash L$, $\|h\| = \|H\| = 1$, $t \in T$, то $H(t) = 1 - \gamma^-{}_h(t) = \gamma_h^+(t) - 1$.*

На основании теорем 2,3 можно установить справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *Если $L \subset C(T)$ — чебышевское подпространство, $h_n, h \in C(T)$, $t \in T$, $\|h_n - h_0\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $H_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} H_0(t)$ (метрическая проекция секвенциально слабо непрерывна).*

Для доказательства теоремы 1 обозначим через $t_1, t_2, \ldots, t_n$ предельные точки T и полагаем $L_0 = \{h \in L:\ h(t_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, æ — естественное фактор-отображение $L \to L/_{L_0}$. Рассмотрим в $C(t)$ $(n+1)$-мерное подпространство Z_0, $Z_0 \bigcap L = \{0\}$, образованное финитными функциями, и пусть $S_n = \{h \in Z_0:\ \rho(h, L) = 1\}$. Определим отображение $\tau:\ S_n \to L/_{L_0}$, полагая $\tau(h) = æ[\pi(h)]$. Поскольку $\dim L/_{L_0} = n$, то секвенциально слабо непрерывное отображение τ будет непрерывным в нормированной топологии. Следуя П. А. Бородину [4], применим к τ теорему Борсука об антиподальных отображениях [5]. Это позволяет установить наличие $h_0 \in S_n$, для которого $\pi(h_0) \in L_0$. Поскольку $(h_0 - \pi h_0)(t_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то не найдется (в силу леммы A) элемента $\mu \in S_{L^\perp}$, который бы реализовывал равенства $\mu(h_0 - \pi(h_0)) = \|h_0 - \pi(h_0)\| = 1$. Получили противоречие с критерием Зингера [6] элемента наилучшего приближения.

Список литературы

1. *Гаркави А.Л.* О наилучшем приближении элементами бесконечномерных подпространств одного класса // Матем. сборник. 1963. Т. 62, № 1. С. 104–120.
2. *Колмогоров А.Н.*, *Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. 543 с.
3. *Устинов Г.М.* О подпространствах существования в $C(Q)$ // Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 5. С. 726–737.
4. *Бородин П.А.* Аппроксимативные свойства подпространств в пространствах типа c // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2002. Vol. 5. P. 54–58.
5. *Borsuk K.* Drei Sätre über die n-dimensionale enclidische sphäre // Fund. Math. 1933. Vol. 20. P. 177–190.
6. *Singer I.* Characterisation des éléments de meilleure approximations daus un espace de Banach quelconque // Acta Sci. Math. 1956. Vol. 17, № 3–4. P. 181–189.